

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS  
DE TELECOMUNICACIÓN



Tesis Doctoral

**Evaluación de los Efectos de Cuantificación  
en las Estructuras de Filtros Digitales  
Mediante Técnicas de Simulación  
Basadas en Extensiones de Intervalos**

Presentada por:

D. Juan Antonio López Martín  
*Ingeniero de Telecomunicación*

Directores:

D. Octavio Nieto-Taladriz García  
*Catedrático de Universidad*

D. Carlos Carreras Vaquer  
*Titular de Universidad*

Madrid, Septiembre de 2004

Tribunal nombrado por el Magnífico y Excelentísimo Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día 15 de Julio..... de 2004

Presidente	Dr. <u>Carlos A. LÓPEZ BARRIO</u>
Vocal	Dr. <u>Pelegrín CAMACHO LOZANO</u>
Vocal	Dr. <u>Jose' Antonio RODRIGUEZ MONDEJAR</u>
Vocal	Dr. <u>Fernán Condeval PALACIO</u>
Secretario	Dr. <u>Franco Javier CASAJUS QUIRÓS</u>

Realizado el acto de lectura y defensa de la Tesis el día:

17 de Septiembre de 2004. en ETSI TELECOMUNICACION  
UPM

Calificación sobresaliente "Cum laude" 5 votos

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

.....  
EL SECRETARIO  
.....

## RESUMEN

En esta Tesis se presenta una metodología de análisis basada en la aritmética de intervalos y sus extensiones para calcular los efectos de cuantificación en uno de los sistemas conceptualmente más sencillos y utilizados en el área de procesamiento de señal, los filtros digitales. Las diferentes propuestas de realización de estos sistemas (las diferentes familias de estructuras) pretenden reducir en lo posible estos efectos, a la vez que minimizan el coste asociado a su implementación.

Las estructuras de filtros digitales han sido ampliamente investigadas durante las últimas décadas utilizando estudios o simulaciones numéricas, pero la formalización de la aritmética afin, basada en desglosar linealmente las operaciones con intervalos que describen el funcionamiento de los sistemas, permite ofrecer información adicional de forma rápida y sencilla, y, sobre todo, es capaz de adaptarse con precisión a los cálculos que requieren estos sistemas. El hecho de que se produzcan sobredimensionamientos en los intervalos que representan los resultados es especialmente importante en sistemas con realimentaciones, lo cual ocurre en casi todos los sistemas DSP, puesto que tienden a hacer inservibles las informaciones que puedan proporcionar estos elementos.

En el Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad Politécnica de Madrid se ha desarrollado el conjunto de herramientas *Ábaco*. Una de sus principales cualidades es que basa sus cálculos en simulaciones de elementos multiprecisión cuyos tipos de cuantificación han sido previamente especificados o asignados en todas las señales, lo que restringe nuevamente los posibles sobredimensionamientos. Además, durante esta Tesis se han incorporado nuevas herramientas para analizar los efectos de cuantificación en sistemas lineales con realimentaciones, lo que permite, por ejemplo, comparar y evaluar las ventajas e inconvenientes de las estructuras de filtros digitales.

## RESUMEN

En esta memoria se proporciona: (i) una revisión de los antecedentes y el estado actual de los estudios sobre los efectos de cuantificación en las estructuras de filtros digitales y sobre la aritmética de intervalos y sus extensiones; (ii) una descripción de las herramientas que componen *Ábaco*; y (iii) un conjunto de experimentos que muestran el funcionamiento de las herramientas y los principales resultados que se han obtenido durante esta Tesis.

Además de las anteriormente comentadas, entre otras aportaciones de esta Tesis Doctoral cabe destacar: (i) el análisis de cómo afecta el uso de intervalos al muestreo de señales estadísticas cuando se utiliza el método de Monte-Carlo; (ii) la investigación de cómo la aplicación de intervalos permite trasladar las incertidumbres en el dominio temporal al dominio de la frecuencia y viceversa; y (iii) la comparación entre complejidad de implementación de las estructuras de filtros digitales y los resultados que obtienen las distintas cuantificaciones, en parte posible gracias a la simplificación de los cálculos necesarios por medio de la combinación de los tipos de cuantificación y la aritmética afin.

Estas aportaciones ofrecen una forma, complementaria a las existentes, de abordar el cálculo de las incertidumbres en sistemas DSP cuando éstas son todas de orden igual o inferior a uno. Gracias a ellas, es posible obtener información adicional sobre el comportamiento de los sistemas lineales en general, y sobre los efectos de cuantificación en las estructuras de filtros digitales en particular.

**Palabras clave:** Sistemas DSP, filtros digitales, estructuras, realizaciones, implementación, efectos de cuantificación, anchura de palabra finita, análisis estadístico, ruido, área, herramientas CAD, simulación, multiprecisión, aritmética de intervalos, aritmética afin.

**ABSTRACT**

This PhD Thesis presents an analytic methodology based on interval arithmetic and its extensions that enables obtaining new results on the quantization effects of digital filters. As well as conceptually simple, this type of systems is the most widely used in the Digital Signal Processing field. The different design models (that is, the different filter structures) aim to reduce such quantization effects as much as possible and to simultaneously minimize implementation-derived costs.

Digital filter structures have been extensively studied during the last decades through numeric studies and simulations. Affine Arithmetic formulation, based on disjoining the linear interval operations that describe the system's functionality, allows providing additional information quickly and easily, and, above all, it adapts precisely to the calculations required by such systems. The fact that oversizing arises on the intervals containing the results is particularly relevant in systems containing feedback loops (a property of most DSP systems), as they tend to make the information provided by such elements useless.

The *Departamento de Ingeniería Electrónica* from the *Universidad Politécnica de Madrid* has developed the *Ábaco* set of tools. One of its main characteristics is that its calculations are based on simulations of multi-precision elements whose quantization types have been previously specified or determined for all signals, which again limits the amount of possible oversizing. During this PhD Thesis, some tools have also been incorporated to enable analysis of the quantization effects in linear systems. They support, for example, comparison and evaluation of possible advantages and disadvantages of similar digital filter structures.

The present dissertation provides (i) a review on the previous works and present status of the studies on both quantification effects in digital filter structures and about interval arithmetic and its extensions; (ii) a description of the *Ábaco* conforming tools; and (iii) a set of experiments that show the capabilities of the tools and the most relevant results attained during the project.

## ABSTRACT

In addition to the previously mentioned aspects, this PhD Thesis contributes: (i) an analysis on how the application of intervals in the Monte-Carlo method affects the statistical properties of random signals; (ii) a study on how interval-based simulations provide support for transferring uncertainties from the temporal to the frequency domain and vice-versa; and (iii) a comparison between the implementation complexity of digital filter structures and the results obtained when different quantization sets are specified, feasible in part thanks to the simplification of the computation process introduced by the combination of quantization types and affine arithmetic.

Such contributions constitute a new approach, complementary to the existing ones, to the calculation of uncertainties in DSP systems when the orders of such uncertainties are equal or below one. They provide additional information about the behaviour of linear systems in general, and on the effects of quantization effects of digital filter structures in particular.

**Keywords:** DSP systems, digital filters, structures, realizations, implementation, quantization effects, finite word-length, statistical analysis, noise, area, CAD tools, simulation, multi-precision, interval arithmetic, affine arithmetic.

**INDICE GENERAL**

Indice general.....	i
Indice de figuras.....	v
Indice de tablas.....	xi
Lista de acrónimos.....	xiii
Glosario.....	xvii
Resumen.....	xxi
<i>Abstract</i> .....	xxiii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación.....	3
1.2. Principales aportaciones de la Tesis Doctoral.....	6
1.3. Estructura del documento.....	8
<b>2. Antecedentes y estado actual del tema</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción.....	13
2.1.1. Técnicas de descripción.....	14
2.2. Efectos de cuantificación.....	20
2.2.1. Cuantificación de los coeficientes.....	21
2.2.2. Cuantificación de las señales.....	24
2.2.3. Oscilaciones provocadas por la cuantificación de los bits más significativos.....	32
2.2.4. Oscilaciones provocadas por la cuantificación de los bits menos significativos.....	34
2.3. Técnicas automáticas para estimar las longitudes de palabra.....	39
2.3.1. Tipos de técnicas.....	39
2.3.2. Grupos de investigación más relevantes.....	53

## INDICE GENERAL

<b>3. Materiales y métodos</b>	<b>63</b>
3.1. El conjunto de herramientas de simulación <i>Ábaco</i> .....	65
3.1.1. Visión general y estructura.....	65
3.1.2. La librería <i>LIBABC</i> .....	75
<b>4. Experimentos y resultados</b>	<b>89</b>
4.1. Sobre las simulaciones basadas en intervalos y extensiones de intervalos.....	92
4.1.1. Justificación de la utilización de la Aritmética Afín.....	93
4.1.2. Cómo se modifican las transformadas de <i>Fourier</i> de las señales determinísticas cuando se realizan simulaciones basadas en intervalos.....	96
4.1.3. Cómo se modifican los principales parámetros de las señales aleatorias cuando se realizan simulaciones basadas en intervalos.....	100
4.1.4. Conclusiones sobre las simulaciones basadas en intervalos y extensiones.....	106
4.2. Sobre los límites de $h(k)$ y $H(z)$ .....	108
4.2.1. Cómo afectan los efectos de cuantificación a la respuesta al impulso y a la función de transferencia.....	108
4.2.2. Cuáles son los límites de los valores de la respuesta al impulso para una plantilla dada de la función de transferencia.....	114
4.2.3. Cómo afecta cada incertidumbre en las muestras de la respuesta al impulso y la función de transferencia a su descripción dual.....	116
4.2.4. Conclusiones sobre los límites de $h(k)$ y $H(z)$ .....	122
4.3. Sobre los efectos de cuantificación.....	123
4.3.1. Cómo se puede calcular con <i>Ábaco</i> el ruido de redondeo .....	124
4.3.2. Cómo se puede analizar con <i>Ábaco</i> el ruido de desbordamiento .....	126
4.3.3. Cómo se pueden detectar con <i>Ábaco</i> las oscilaciones OLC y ULC.....	130
4.3.4. Conclusiones sobre los efectos de cuantificación.....	135



## INDICE GENERAL

<b>5. Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>137</b>
5.1. Conclusiones.....	139
5.2. Líneas futuras.....	146
<b>A. Conceptos básicos sobre las estructuras de filtros digitales</b>	<b>149</b>
A.1. Obtención de las descripciones SVD y FSVD.....	151
A.2. Expresiones básicas con SVD y FSVD.....	155
A.3. Expresiones básicas sobre cuantificación.....	160
A.4. Cálculo del ruido de redondeo.....	164
<b>B. Descripción y utilización de las herramientas de <i>Ábaco</i></b>	<b>169</b>
B.1. Descripción de las herramientas.....	171
B.2. Ejemplos de utilización.....	194
<b>Referencias</b>	<b>209</b>