

# FILTROS DE DIFUSIÓN ANISOTRÓPICA 3-D APLICADOS A IMÁGENES DE RESONANCIA MAGNÉTICA CEREBRAL

Juan E. Ortuño<sup>1</sup>, Norberto Malpica<sup>1</sup>, Manuel Descó<sup>2</sup>, Andrés Santos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Electrónica, ETS Ingenieros de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid

<sup>2</sup>Unidad de Medicina y Cirugía Experimental, Hospital General Universitario “Gregorio Marañón”, Madrid

## RESUMEN

El filtrado de difusión ha sido ampliamente utilizado en el tratamiento de imágenes 2-D. Una familia de estos filtros, los de realce de coherencia y realce de bordes, se muestran especialmente útiles en la reconstrucción de estructuras fibrilares y la eliminación de ruido en las zonas de alto gradiente de una imagen. En este artículo se evalúa una combinación de los filtros anisotrópicos de realce de coherencia con el esquema de difusión isotrópica de *Perona* y *Malik*, como una buena opción en el procesamiento de imágenes de resonancia magnética cerebral ponderadas en  $T1$  y  $T2$ . Los filtros desarrollados han debido, por tanto, implementarse para datos tridimensionales.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los filtros de difusión y su implementación discreta basada en la aproximación de derivadas parciales mediante diferencias finitas fueron introducidos en el campo del procesamiento de imágenes por *Perona* y *Malik* [6]. El esquema general de difusión incluye tanto el filtrado gaussiano como la difusión no lineal isotrópica y anisotrópica, formalizadas mediante una misma base matemática compacta. Las condiciones de estabilidad y convergencia de los filtros de difusión han sido estudiadas en profundidad [8].

Los filtros propuestos inicialmente en [6] son del tipo isotrópico, y son adecuados para el filtrado de ruido de regiones homogéneas limitadas por gradientes bien definidos, aunque en las pruebas realizadas se han mostrado poco adecuados para la mejora de imágenes con bordes ruidosos y que presenten patrones de líneas.

Algunos tipos de filtros anisotrópicos de difusión, como el de realce de bordes (*edge enhancing*) y el de realce de coherencia (*coherence enhancing*) pueden superar la limitación de la difusión isotrópica en este tipo de estructuras.

En este trabajo se presenta una clase de filtro de realce de coherencia, adaptado para tres dimensiones,

que ha dado buenos resultados en imágenes de resonancia magnética cerebral ponderadas en tiempos  $T1$  y  $T2$ . Además de los datos cualitativos (en cuanto al aspecto de la imagen) se han hecho medidas cuantitativas de reducción de ruido que mejoran las obtenidas con un filtro de difusión isotrópico.

## 2. DIFUSIÓN ISOTRÓPICA

La ecuación de difusión aparece en muchos fenómenos físicos de transporte, como el calor. En general es un proceso no lineal definido como:

$$\partial_t L = \text{div}(D \nabla L) \quad (2.1)$$

siendo  $D$  el tensor de difusión, y  $\nabla L$  un gradiente de concentración. En el procesamiento de imágenes se puede identificar la concentración  $L$  como el nivel de gris en un punto de la imagen.

Se dice que la difusión es isotrópica si el flujo, caracterizado por  $j = -D \nabla L$ , es paralelo al gradiente  $\nabla L$ . En caso contrario se habla de difusión anisotrópica. Además, si el tensor  $D$  tiene valores constantes en todo el dominio de la imagen, tendremos una difusión homogénea, pero si toma valores en función de la posición se tratará de un proceso inhomogéneo.

*Perona* y *Malik* desarrollaron filtros de difusión en el que el tensor  $D$  se simplificaba con un valor escalar, aunque los clasificaron como filtros anisotrópicos. Esto ha dado lugar a una confusión generalizada en la nomenclatura para las publicaciones posteriores, en los que en muchas ocasiones se habla de anisotropía cuando simplemente se proponen filtros isotrópicos con flujo paralelo al gradiente, como en [2] o [5].

En el modelo de difusión isotrópica, el valor del tensor escalar  $c$  se denomina *difusividad* o bien *conductividad*, y en el proceso de imágenes se suele hacer que sea una función dependiente del módulo del gradiente de la imagen en cada punto, con lo que la ecuación de difusión propuesta por *Perona* y *Malik*, corresponde a la siguiente expresión:

$$\partial_t L = \text{div}(c(|\nabla L|) \nabla L) \quad (2.2)$$

Las conductividades sugeridas en [6], y que son frecuentemente empleadas en el tratamiento de imagen médicas, son:

$$c_1(|\nabla L|) = \exp(-|\nabla L|^2 k^{-2}) \quad (2.3)$$

$$c_2(|\nabla L|) = \left(1 + (|\nabla L| k^{-1})^{1+\alpha}\right)^{-1} \quad (2.4)$$

Que son funciones decrecientes entre uno y cero. Otras funciones de conductividad dependientes del gradiente han sido propuestas por *Black* y col. [2], *Catté* y col. [3] o *Weickert* [8].

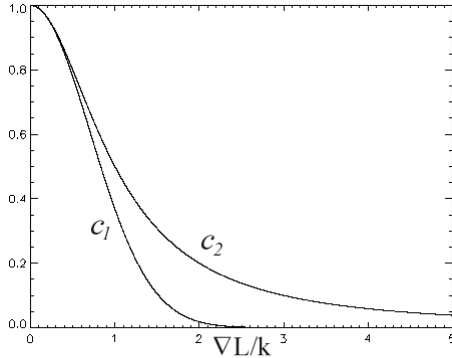


Fig 1 Funciones de conductividad  $c_1$  y  $c_2$ .

El parámetro  $k$  se selecciona para discriminar los valores de gradiente debidos al ruido (que deberán filtrarse eficientemente) de aquellos gradientes de mayor valor presentes en los bordes de la imagen.

### 3. DIFUSIÓN ANISOTRÓPICA

En la ecuación general de difusión (2.1), el tensor  $D$  es una matriz simétrica definida positiva. Para el caso particular 3-D aplicable a volúmenes de resonancia magnética, la ecuación de difusión se puede expresar en forma desarrollada como:

$$\partial_t L = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x L & \partial_y L & \partial_z L \end{pmatrix}^T \quad (3.1)$$

En función de los coeficientes del tensor y las derivadas parciales en coordenadas cartesianas. En total existen nueve contribuciones en el filtro:

$$\begin{aligned} \partial_t L = & \partial_x(a\partial_x L) + \partial_x(b\partial_y L) + \partial_x(c\partial_z L) + \\ & \partial_y(b\partial_x L) + \partial_y(d\partial_y L) + \partial_y(e\partial_z L) + \\ & \partial_z(c\partial_x L) + \partial_z(e\partial_y L) + \partial_z(f\partial_z L) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La resolución numérica de esta expresión se aproxima para retículos discretos mediante diferencias finitas [7]. La manera más directa de resolver la evolución en el tiempo consiste en utilizar diferencias hacia delante, mediante un esquema explícito que permite calcular el resultado en cada incremento de tiempo a partir de los resultados anteriores. La discretización temporal queda como:

$$L^{t+1} = (I + \tau A^t) * L^t \quad (3.3)$$

Donde  $A^t * L^t$  es la realización discreta del segundo término de la ecuación de difusión,  $div(D\nabla L)$ . El valor  $\tau$  debe hacerse lo suficientemente pequeño para asegurar la estabilidad y convergencia de la solución [8].

En cuanto a la aproximación discreta de los términos espaciales de la fórmula 3.2, hemos usado tanto las diferencias finitas centrales como las diferencias hacia delante y atrás, definidas para la dimensión  $x$  como:

$$\begin{aligned} \partial_x^- L &= L_{x,y,z} - L_{x-1,y,z} \\ \partial_x^+ L &\approx L_{x+1,y,z} - L_{x,y,z} \\ \partial_x^c L &\approx \frac{1}{2}(L_{x+1,y,z} - L_{x-1,y,z}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los términos de (3.2) que dependen de una sola variable espacial el esquema utilizado ha sido:

$$\partial_x(a\partial_x L) \approx \frac{1}{2}(\partial_x^+(a\partial_x^- L) + \partial_x^-(a\partial_x^+ L)) \quad (3.5)$$

Y los términos en dos variables se aproximan mediante diferencias finitas centrales:

$$\partial_x(b\partial_y L) \approx \partial_x^c(b\partial_y^c L) \quad (3.6)$$

De igual manera se opera con los términos equivalentes en  $y$ ,  $z$ . Esta discretización es válida para cualquier tensor  $D$ , y el comportamiento del filtro dependerá del valor que tomen sus coeficientes.

### 4. DIFUSIÓN DE REALCE DE COHERENCIA

En muchas situaciones, el gradiente local medido como diferencias de píxeles adyacentes [6] no proporciona información útil acerca de la orientación percibida de la imagen, porque los bordes pueden ser muy ruidosos y ocasionan que el gradiente local fluctúe aleatoriamente, tanto en magnitud como en dirección.

Por esta razón interesa realizar un cambio de escala sobre la imagen mediante un filtrado gaussiano de desviación estándar  $\sigma$ , que denotaremos como  $L_\sigma$ .

El modelo de difusión por realce de coherencia (*coherence enhancing*) fue propuesto por *Weickert* [8], y se basa en el tensor de estructura (*structure tensor*), también llamado matriz de dispersión, definido como:

$$J_\rho(\nabla L_\sigma) = G_\rho * (\nabla L_\sigma \cdot \nabla L_\sigma^T) \quad (4.1)$$

Se trata de una matriz simétrica y positiva semi-definida, y está regularizada mediante un filtro gaussiano de desviación estándar  $\rho$ .

Para imágenes 3-D el tensor de estructura tiene la siguiente expresión en forma desarrollada:

$$J_\rho = G_\rho * \begin{pmatrix} \partial_x L_\sigma \partial_x L_\sigma & \partial_x L_\sigma \partial_y L_\sigma & \partial_x L_\sigma \partial_z L_\sigma \\ \partial_x L_\sigma \partial_y L_\sigma & \partial_y L_\sigma \partial_y L_\sigma & \partial_y L_\sigma \partial_z L_\sigma \\ \partial_x L_\sigma \partial_z L_\sigma & \partial_y L_\sigma \partial_z L_\sigma & \partial_z L_\sigma \partial_z L_\sigma \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

El tensor de difusión  $D$  se construye rotando una matriz diagonal cuyos elementos sean las conductividades en

tres direcciones perpendiculares del espacio, mediante la matriz de autovectores del tensor de estructura, ordenados en orden decreciente:

$$D = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^T \quad (4.3)$$

Con el cambio del sistema de coordenadas, la dirección de coherencia local (indicativo de la presencia de patrones de orientación) tendrá una conductividad  $c_3$ . [7] y [8] proponen la fórmula:

$$c_3 = \alpha + (1 - \alpha) \exp(-C\kappa^{-1}) \quad (4.4)$$

Donde  $\alpha$  es un número positivo y próximo a cero, y  $\kappa$  es el valor de coherencia local medido a partir de los autovalores del tensor de estructura, según la siguiente expresión:

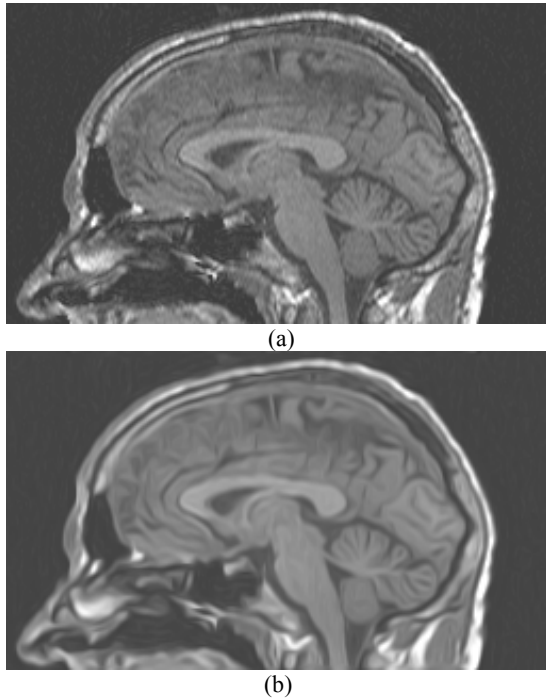
$$\kappa = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 (\lambda_i - \lambda_j)^2 \quad (4.5)$$

Para las direcciones perpendiculares,  $c_1$  y  $c_2$  toman un valor próximo a cero.

En este trabajo se ha utilizado una expresión derivada de la propuesta de *Perona y Malik* para filtros isotrópicos (2.3):

$$c_3 = \max(\alpha, 1 - \exp(-C^{-1}\kappa)) \quad (4.6)$$

El parámetro  $C$  se puede fijar a un porcentaje del valor del histograma acumulado de coherencias locales  $\kappa$ , asumiendo que estadísticamente un determinado tanto por ciento de cada tipo de imagen estará asociada a bordes significativos.



**Fig 2** (a) Corte sagital de RM ponderada en T1, (b) Filtrado de realce de coherencia.

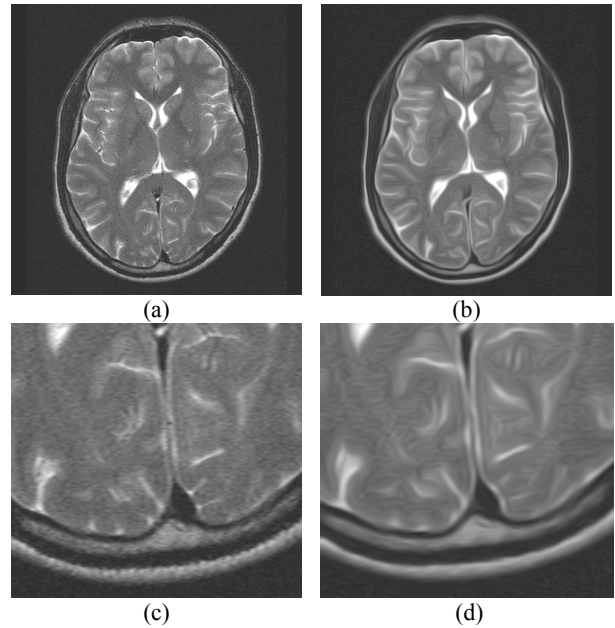
## 5. RESULTADOS

Para comparar cuantitativamente el comportamiento de esta clase de filtros se ha utilizado una colección de *phantoms* de RM procedentes del *McConnell Brain Image Center*, de la *McGill University* (Canadá) [4].

Se han aplicado varios tipos de filtros de difusión 3-D sobre las resonancias simuladas a las que se les ha sumado un determinado nivel de ruido gaussiano. Hemos utilizado la medida  $HC$  [1], que refleja la influencia tanto como de la homogeneidad intra-regional como el contraste local entre regiones (para lo que se necesita disponer de una imagen segmentada *ground-truth*). La medida de  $HC$  viene dada por:

$$HC = \sum_{I=1}^k \frac{N_I}{N} \frac{1}{\frac{1}{N_I - 1} \sum_{i \in I} (L_i - \bar{L}_I)^2} \sum_{I \neq J} \left( \frac{N_I \bar{L}_I}{N} - \frac{N_J \bar{L}_J}{N} \right)^2 \quad (5.1)$$

Donde  $N$  es el número total de vóxeles,  $N_I$  el número de vóxeles de un determinado tejido (en nuestro caso, sustancia blanca, sustancia gris o líq. cefalorraquídeo) y  $L_i$  el valor de la imagen en un punto.



**Fig 3** (a) Corte axial de RM ponderada en T2, (b) Filtrado de realce de coherencia, (c) y (d) Detalles ampliados.

Los mejores resultados de la medida  $HC$  se obtienen mediante una combinación de un filtro de realce de coherencia más un filtro de difusión isotrópica. El primer filtro anisotrópico elimina el ruido en las zonas de alto gradiente y realza las interfases entre los diferentes tejidos cerebrales, y en un segundo procesamiento, el filtro de *Perona* de difusión isotrópica suaviza las zonas interiores de tejido, que están ahora limitadas por bordes más definidos, y por consiguiente se evita el principal problema que presentan los

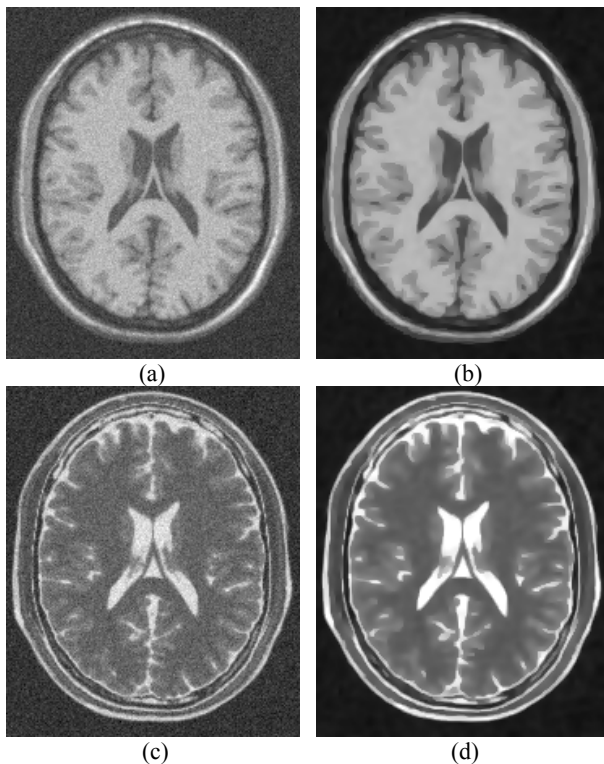
esquemas de difusión isotrópica, el *emborronado* de bordes ruidosos.

La tabla 1 muestra los índices *HC* relativos a la imagen ruidosa original no filtrada. Se puede comparar la mejora respecto a la difusión isotrópica del filtrado coherente. El nivel de ruido indica el tanto por ciento de su desviación estándar respecto al tejido de referencia.

El parámetro *k* del filtro isotrópico se elige automáticamente estimando el ruido según el algoritmo de Gerig y col [5] de tal forma que  $k=1.5\sigma$ . Se ofrecen datos de los *phantoms* [4] de tipo *T1* y *T2*.

$\sigma$	RM T1 HCr F.D	RM T1 HCr F.C	RM T2 HCr F.D	RM T2 HCr F.C
3 %	1.24	1.27	1.78	2.18
5 %	1.51	1.62	2.46	3.18
7 %	1.85	2.13	3.07	4.00
9 %	2.23	2.69	3.84	4.80

**Tabla 1** F.D: Filtro de difusión de Perona y Malik, F.C: difusión de realce de coherencia.



**Fig 4** (a) y (c) Cortes axiales de *phantoms* T1 y T2 con ruido añadido, (b) y (d) Respectivas imágenes filtradas con una difusión de realce de coherencia seguida de difusión isotrópica.

## 6. CONCLUSIONES

En los resultados experimentales del filtrado de realce de coherencia se aprecia que la imagen es restaurada principalmente en las zonas que presentan una dirección característica limitadas por bordes, como el líquido cefalorraquídeo o la grasa que rodea el cráneo en las

resonancias ponderadas en *T2*. Sin embargo, estos filtros no son adecuados para eliminar ruido en regiones homogéneas, como las zonas de sustancia blanca. Para mejorar esta parte es conveniente aplicar posteriormente o de forma combinada un filtrado isotrópico.

Se ha observado que la escasa sensibilidad del filtro de realce de coherencia con relación al parámetro *C*, que contrasta con los diferentes resultados en la difusión isotrópica conforme se varía el factor de escalado *k* de las expresiones (2.3) o (2.4), lo que obliga a una estimación precisa del nivel de ruido de la imagen. Este hecho, junto con la ausencia de degradación en los bordes por efecto *pinhole* característico de otros filtros de difusión cuando se aumenta el número de iteraciones, posibilita un filtrado automático sin elección de parámetros por parte del usuario.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido en parte financiado por el proyecto TIC99-1085-C02 (CICYT) y por el III PRICIT de la Comunidad de Madrid.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] I. Bajla and I. Höllander, "Locally Adaptive Conductance in Geometry-Driven-Diffusion Filtering of Magnetic Resonance Tomograms", *IEE Proc. on Vision, Image and Signal Processing*, vol 147, no 3, pp 271-282, 2000.
- [2] M.J Black, G. Sapiro, D.H Marimont and D. Heeger, "Robust Anisotropic Diffusion", *IEEE Trans. on Image Processing*, vol 7, no 3, pp 421-432, 1998.
- [3] F. Catté, P.L Lions, J.M Morel and T. Coll, "Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol 29, no 1, pp 182-193, 1992.
- [4] C.A. Cocosco, V. Kollokian, R.K. Kwan and A.C. Evans, "BrainWeb: Online Interface to a 3D MRI Simulated Brain Database", *NeuroImage*, vol 5, no 4, pp 425, 1997.
- [5] G. Gerig, O. Kübler, R. Kikinis and F.A Jolesz, "Nonlinear Anisotropic Filtering of Mri Data," *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol 11, no 2, pp 221-232, 1992.
- [6] P. Perona and J. Malik, "Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion", *IEEE Trans. on Patt. Analysis and Machine Intelligence*, vol 12, no 7, pp 629-639, 1990.
- [7] H. Spies and H. Schar, "Accurate Optical Flow in Noisy Image Sequences", *VIII IEEE Int. Conference on Computer Vision, ICCV 01*, 2001.
- [8] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, B.G Teubner, Stuttgart, 1998.