

APELLIDOS

NOMBRE:

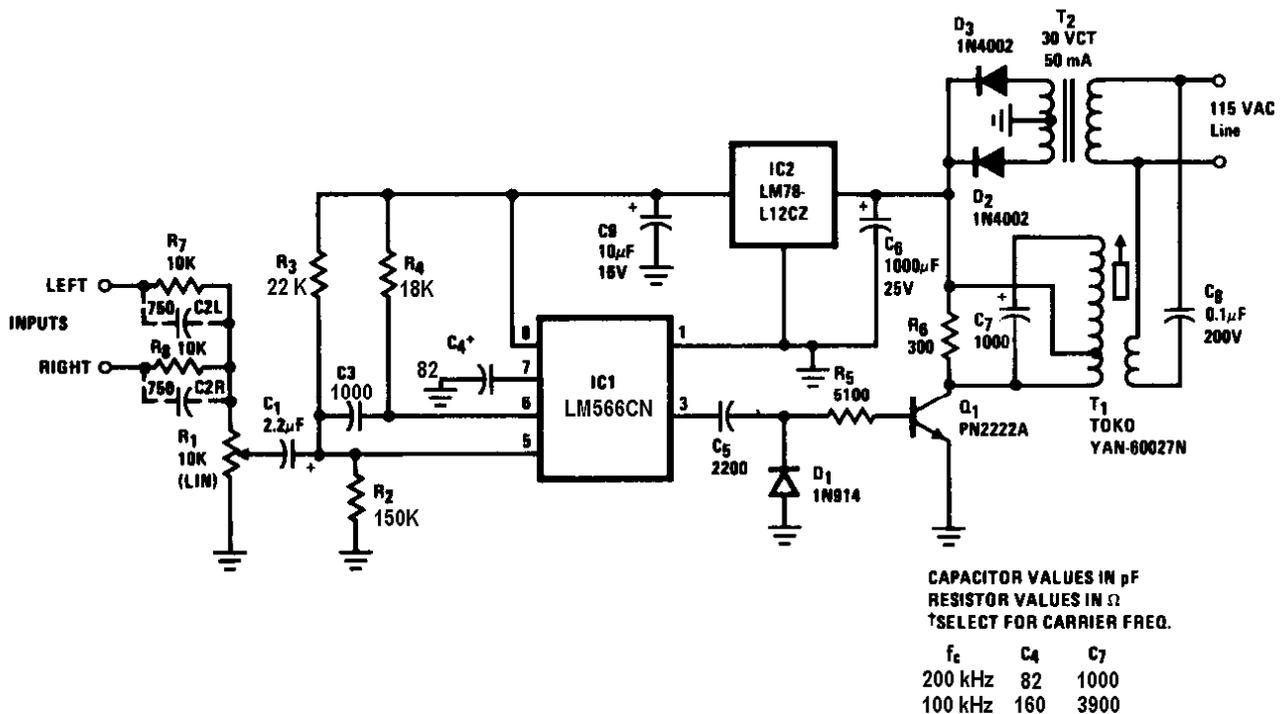
## SOLUCION

---

**Problema 1-** Empleando el Circuito Integrado LM566 de National Semiconductor, que es un Oscilador controlado por tensión (VCO) la Figura muestra un transmisor FM (TX) para modular una portadora de  $f_0=200$  kHz con la señal de audio proveniente de los canales izquierdo y derecho de un reproductor musical (inputs LEFT and RIGHT). Este TX que fue diseñado para inyectar esta portadora modulada en frecuencia (FM) a una red de distribución eléctrica de  $110V_{ef}$  y 60Hz en Estados Unidos, *vamos a adaptarlo para la red de  $220V_{ef}$  y 50Hz que tenemos en España* y para que transmita con una  $f_0=141$  kHz. Se adjuntan dos hojas de características del LM566 útiles para realizar cálculos y razonamientos.

- 1- Considerando que el transformador T2 de alimentación del circuito (uno de  $115V_{ef}$  en primario y  $30V_{ef}$  en secundario con toma intermedia capaz de dar 50mA eficaces) se reemplaza por otro de  $220V_{ef}$  en primario y  $30V_{ef}$  en un secundario similar al original, la alimentación del TX quedaría garantizada. Con ello, calcule los nuevos valores de los componentes que haya que modificar para tener la nueva  $f_c=141$  kHz **justificando** sus propuestas. (5 p)
- 2- Dada la baja impedancia que ofrece a 50 Hz el secundario del transformador T1 que acopla la portadora amplificada por Q1 a la red eléctrica, el condensador  $C_8$  deberá soportar casi toda la tensión de red ( $V_p \approx 310V$ ), de modo que al secundario sólo va a llegar una pequeña parte de este valor. Suponiendo que la relación de espiras entre secundario de T1 y su parte de primario conectada a  $R_6=300\Omega$  es de **1:1**, refleje  $R_6$  hacia secundario (a 50Hz el efecto de  $C_7$  es pequeño) para estimar la tensión de pico de 50Hz que habrá en el secundario de T1 y entre colector y el emisor de Q1. (10 p)
- 3- Aunque a  $f=50$ Hz los efectos de  $C_7$  pueden despreciarse, esto no es así a frecuencias altas, en especial en las cercanías de la frecuencia de resonancia  $f_0$  porque  $C_7$  permite sintonizar el circuito L-C del colector de modo que  $f_0$  coincida exactamente con  $f_0$ , la frecuencia central de la portadora generada por IC1. Así la impedancia de carga del colector de Q1 es máxima a  $f_c$ , lo que permite a Q1 amplificar de forma selectiva una banda de frecuencias centrada en  $f_0=f_0$ . Considerando que a  $f_0$  la inductancia L de pérdidas de T1 va a resonar en paralelo con  $C_7$ , obtenga ese valor de L. (10 p).
- 4- La impedancia de colector de Q1 a  $f_0=f_0$  será  $R_6$  en paralelo con la impedancia de secundario reflejada hacia el primario sobre  $R_6$  (relación **1:1**). Suponiendo que la impedancia de la red eléctrica a  $f_0=f_0$  es de algunos ohmios y resistiva (por ejemplo  $300\Omega$  para simplificar) refleje la impedancia de secundario sobre  $R_6$  y estime cuál será el efecto de dicha reflexión sobre el factor de calidad del circuito L-C del colector de Q1. Puede suponer que una impedancia  $Z(jf)=R+jX$  es  $Z(jf) \approx R$  si  $R \geq 4X$  y para ilustrar el efecto anterior puede estimar el factor de calidad antes de reflejar y después de reflejar esa impedancia de secundario. (10 p)
- 5- Considerando que  $C_6$  es suficiente para que su tensión no caiga por debajo del valor que necesitaría un regulador LM7815 que alimentase con 15V al VCO, suponga que reemplazamos el LM7812 por el LM7815. Indique si la nueva frecuencia central  $f_0$  de la portadora del TX es igual o no a la anterior y por qué ello es así. (10 p)

- 6- Según el resultado del apartado anterior parece que el regulador de tensión no sería muy necesario para alimentar este TX, que podría ser alimentado con la tensión sin regular como la etapa amplificadora. A propósito: ¿Por qué cree Vd. que el colector de Q1 no se alimenta con la tensión regulada y estable que entrega IC2? (8 p)
- 7- La sensibilidad de este VCO es, según las hojas de características y bajo ciertas condiciones:  $K_o=6.6\text{kHz/V}$ , pero para lo que sigue debemos usar la fórmula que da su frecuencia de oscilación. A partir de ella obtenga la  $K_o$  en kHz/V de este VCO cuando su frecuencia central es  $f_o=141\text{ kHz}$  en los casos de alimentarlo a) con un LM7812 y b) con un LM7815. Considere que:  $K_o=\partial f_o/\partial V_5$  y comente si podemos o no prescindir del regulador para alimentar este VCO, indicando qué sucedería si su tensión de alimentación tuviese una fluctuación de 1 V pico-pico. (17 p)
- 8- Considere que a las entradas LEFT y RIGHT se aplica la misma señal de audio de  $100\text{mV}_p$  mediante un generador cuya impedancia de salida es despreciable y que no hemos puesto los condensadores de preénfasis  $C_{2L}$  y  $C_{2R}$ . Con el VCO alimentado por el LM7812 y con el cursor del potenciómetro  $R_1$  en su punto más alejado del raíl común de masa, obtenga la desviación máxima de frecuencia a la salida del VCO para esta señal moduladora de audio. Suponga que  $C_1$  deja pasar bien esa señal de audio para hacer el cálculo que se le pide. (10 p)
- 9- Empleando uno de los VCO cuya  $K_o$  obtuvo en el apartado 7 (si no resolvió ese Apartado, tome  $K_o=50\text{kHz/V}$ ) y un comparador de fase de  $K_D=1.6\text{V/rad}$ , construya un lazo enganchado en fase (PLL) para demodular la señal FM del TX y explique su funcionamiento básico, dando su función o ganancia de transferencia  $G_{\text{Dem}}(f \rightarrow 0)$  (V/Hz) a muy bajas frecuencias. (7 p)
- 10- Obtenga  $G_{\text{Dem}}(f)$  indicando su ancho de banda o dando un diagrama asintótico de Bode con la frecuencia para su módulo. *Sugerencia:* al comprobar si  $G_{\text{Dem}}(f)$  es igual a la del Apartado anterior cuando  $f \rightarrow 0$ , recuerde el factor  $2\pi$  por el que  $f$  expresada en rad/s es mayor que una frecuencia que  $f$  expresada en Hz (13 p).



**FIGURE 1. Carrier System Transmitter**

## LM566C Voltage Controlled Oscillator

### General Description

The LM566CN is a general purpose voltage controlled oscillator which may be used to generate square and triangular waves, the frequency of which is a very linear function of a control voltage. The frequency is also a function of an external resistor and capacitor.

The LM566CN is specified for operation over the 0°C to +70°C temperature range.

### Features

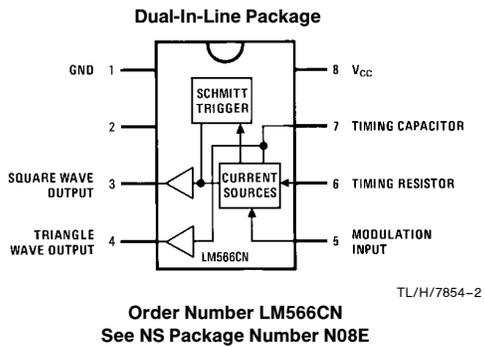
- Wide supply voltage range: 10V to 24V
- Very linear modulation characteristics

- High temperature stability
- Excellent supply voltage rejection
- 10 to 1 frequency range with fixed capacitor
- Frequency programmable by means of current, voltage, resistor or capacitor

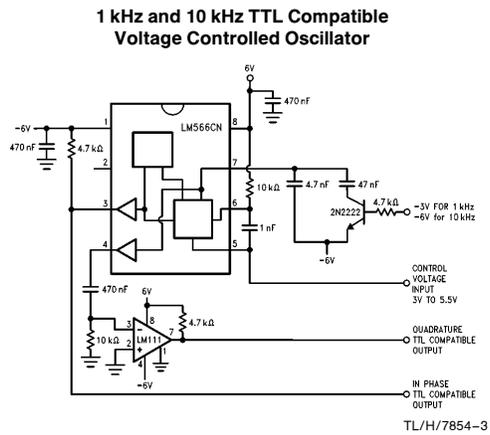
### Applications

- FM modulation
- Signal generation
- Function generation
- Frequency shift keying
- Tone generation

### Connection Diagram



### Typical Application



## Absolute Maximum Ratings

If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the National Semiconductor Sales Office/Distributors for availability and specifications.

Power Supply Voltage	26V
Power Dissipation (Note 1)	1000 mW
Operating Temperature Range, LM566CN	0°C to +70°C
Lead Temperature (Soldering, 10 sec.)	+260°C

## Electrical Characteristics $V_{CC} = 12V, T_A = 25^\circ C, AC$ Test Circuit

Parameter	Conditions	LM566C			Units
		Min	Typ	Max	
Maximum Operating Frequency	$R_O = 2k$ $C_O = 2.7 pF$	0.5	1		MHz
VCO Free-Running Frequency	$C_O = 1.5 nF$ $R_O = 20k$ $f_O = 10 kHz$	-30	0	+30	%
Input Voltage Range Pin 5		$\frac{3}{4} V_{CC}$		$V_{CC}$	
Average Temperature Coefficient of Operating Frequency			200		ppm/°C
Supply Voltage Rejection	10-20V		0.1	2	%/V
Input Impedance Pin 5		0.5	1		MΩ
VCO Sensitivity	For Pin 5, From 8-10V, $f_O = 10 kHz$	6.0	6.6	7.2	kHz/V
FM Distortion	±10% Deviation		0.2	1.5	%
Maximum Sweep Rate			1		MHz
Sweep Range			10:1		
Output Impedance Pin 3			50		Ω
Pin 4			50		Ω
Square Wave Output Level	$R_{L1} = 10k$	5.0	5.4		Vp-p
Triangle Wave Output Level	$R_{L2} = 10k$	2.0	2.4		Vp-p
Square Wave Duty Cycle		40	50	60	%
Square Wave Rise Time			20		ns
Square Wave Fall Time			50		ns
Triangle Wave Linearity	+1V Segment at $\frac{1}{2} V_{CC}$		0.5		%

**Note 1:** The maximum junction temperature of the LM566CN is 150°C. For operation at elevated junction temperatures, maximum power dissipation must be derated based on a thermal resistance of 115°C/W, junction to ambient.

## Applications Information

The LM566CN may be operated from either a single supply as shown in this test circuit, or from a split ( $\pm$ ) power supply. When operating from a split supply, the square wave output (pin 3) is TTL compatible (2 mA current sink) with the addition of a 4.7 kΩ resistor from pin 3 to ground.

A 0.001 μF capacitor is connected between pins 5 and 6 to prevent parasitic oscillations that may occur during VCO switching.

$$f_O = \frac{2.4(V^+ - V_5)}{R_O C_O V^+}$$

where

$$2K < R_O < 20K$$

and  $V_5$  is voltage between pin 5 and pin 1.



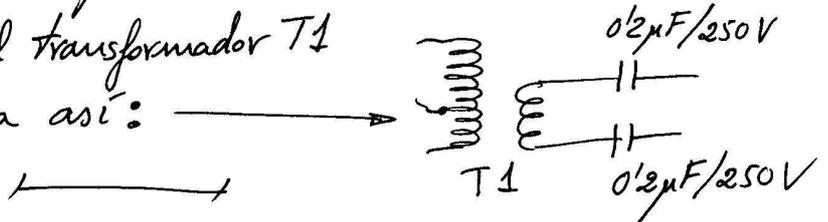
POLITÉCNICA

Asignatura		Fecha	
Apellidos		Curso	
Nombre	— SOLUCION —		Grupo

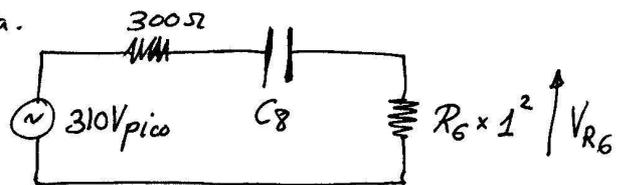
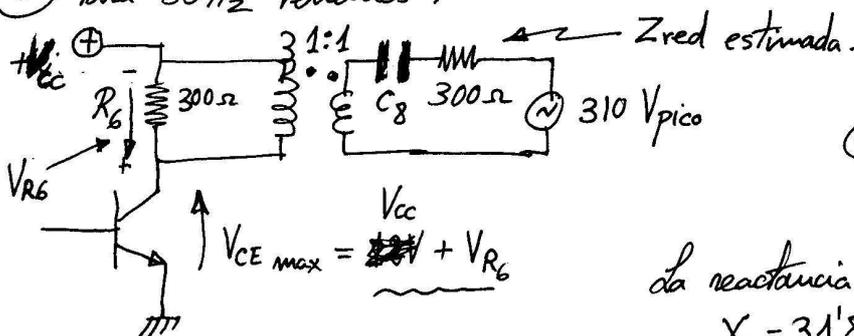
① Con los valores que aparecen en el esquema ( $C_7 = 1000 \text{ pF}$  y  $C_4 = 82 \text{ pF}$ ) tenemos  $f_0 = 200 \text{ kHz}$ . Como  $C_7$  sintoniza el circuito L-C tanque de la etapa amplificadora con arreglo a:  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC_7}$ , habrá que aumentar  $C_7$  al doble para que  $f_0$  caiga en un factor  $\sqrt{2}$ . Lo del factor  $\sqrt{2}$  viene de que:  $141 \text{ kHz} \approx \sqrt{2} \cdot 100 \text{ kHz} = 200/\sqrt{2} \text{ kHz}$ . Por tanto,  $C_7 = 2000 \text{ pF}$ .

El caso de  $C_4$  es distinto porque la frecuencia de salida (o central) del VCO es inversamente proporcional a  $C_4$  (no a su raíz cuadrada). Por ello el nuevo valor de  $C_4$  será:  $82\sqrt{2} = \underline{116 \text{ pF} = C_4}$ .

Y como ya se avisa en el siguiente Apartado,  $C_8$  que soporta  $300 \text{ V}$  con los  $115 \text{ V}_{\text{ef}}$  del esquema deberá ser capaz de soportar  $220\sqrt{2} \approx 310 \text{ V}$  con los  $220 \text{ V}_{\text{ef}}$  de la red en España.  $C_8$  será por tanto de  $0,1 \mu\text{F}/350 \text{ V}$  o mejor capaz de soportar  $400 \text{ V}$ . Una buena idea puede ser usar dos condensadores de  $0,2 \mu\text{F}/250 \text{ V}$  y ponerlos en serie para tener doble aislamiento de la red en dc. Así el secundario del transformador T1 se conectaría a la red eléctrica así:



② Para  $50 \text{ Hz}$  tenemos:



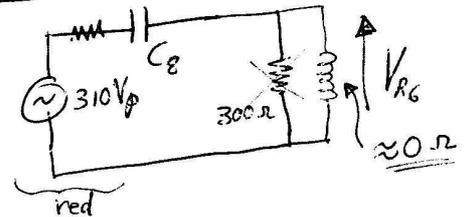
la reactancia de  $C_8$  a  $50 \text{ Hz}$  es:  $X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-7}} \Omega$   
 $X_C = \underline{31,8 \text{ k}\Omega}$

Por tanto  $|V_{R_6}| \approx 310V_p \times \frac{R_6 \cdot 1^2 = R_6}{31'8k\Omega} \approx 310V \times \frac{300\Omega}{30k\Omega} \approx 3V_{pico}$  sobre  $R_6$  (2)

Esto es poco frente a  $+V_{cc} \approx 15V - 0'7 = 20'5V$  que es la tensión que alimenta en dc al colector de  $Q_1$ . Como debido a la señal de  $141kHz$  la tensión de colector de  $Q_1$  oscilará alrededor de esos  $20V$ , bajando casi a cero y subiendo a casi el doble ( $\approx 40V$ ) ésta será la tensión de pico de  $Q_1$  aproximadamente. Hay que considerar que no hemos reflejado la inductancia  $L$  del circuito tanque, que irá en paralelo con  $R_6$  reflejada en secundario, rebajando sus  $300\Omega$  por tanto... Con el valor que se tiene en el próximo Apartado su efecto a  $50Hz$  sería cortocircuitar a  $R_6 \cdot 1^2 = R_6$  con algo del orden de  $\pm j1\Omega$  o menos. Por ello los  $3V_{pico}$  sobre  $R_6$  es un valor por exceso, como si  $L$  no existiese, pero en realidad  $L$  existe y cortocircuita a  $R_6$ .

(3)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_7}} \Rightarrow 2\pi \underbrace{\sqrt{2}}_{f_0} \cdot 10^5 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot 2000 \cdot 10^{-12}}} \Rightarrow L = 633\mu H$

La reactancia de  $L$  a  $50Hz$  sería:  $2\pi \cdot 50 \cdot 633 \cdot 10^{-6} = 0'2\Omega$  !  
 apenas habrá tensión de  $50Hz$  en colector de  $Q_1$ .

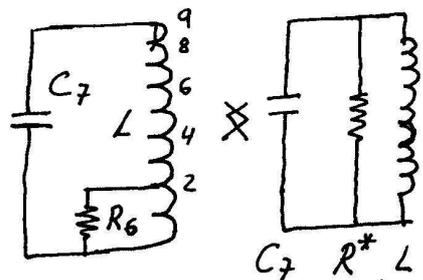


(4) Al reflejar con  $n=1$  lo que hay en secundario de  $T_1$  deberemos reflejar la  $Z_{red} = (300\Omega \text{ serie con reactancia de } C_8) = 300\Omega - j11\Omega$  porque a  $f_0$  la reactancia de  $C_8$  ya no es  $31k\Omega$  sino  $11\Omega$ . Por tanto, reflejamos hacia primario unos  $300\Omega$  sin apenas parte imaginaria. Estos  $300\Omega$  se pondrán en paralelo con  $R_6 = 300\Omega$ . Por ello, si el  $Q$  antes del circuito venía dado esencialmente por  $R_6 = 300\Omega$ , el  $Q$  después vendrá dado por una  $R = R_6 // \sim 300\Omega \approx 150\Omega$  luego será la mitad.

El cambio  $Q_{antes} \approx 2 Q_{después}$  siendo  $Q_{después}$  el factor de calidad cuando se consideran las pérdidas (inyección a la red) a través del secundario de T1, ya contesta a la pregunta. No obstante la tentación de calcular:

$Q_{antes} = \omega_0 R_6 C = 2\pi \cdot 141 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 116 \cdot 10^{-12}$  es fuerte. Si lo hacemos obtendríamos:  $Q_{antes} = 0.03$  un bajo valor que nos recuerda que  $R_6$  no "ve" toda la tensión sobre L y C7, sino una pequeña fracción de ella. Es decir: esa expresión  $\omega_0 R_6 C = Q_{antes}$  no es cierta.

Necesitaríamos saber la relación de espiras en el auto-transformador del primario. Suponiendo que la toma intermedia está en la 2ª espira de las 9 espiras que aparecen dibujadas (o en la 20ª espira de las 90 que aparecen) la  $R^*$  del circuito equivalente sería:



$R^* \approx \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cdot R_6 \approx 20 \cdot R_6$ . Por ello el  $Q_{antes}^*$  "auténtico" del L-C tanque sería 20 veces mayor:  $Q_{antes}^* = 20 \times 0.03 = \underline{\underline{6}}$  que ya es un valor más razonable que caería a  $3 = Q_{después}^*$  por el efecto de carga de la red sentido por el secundario y transferido al primario.

5) La expresión de la frecuencia <sup>central</sup> de salida del VCO es:  $f_0 = \frac{2.4}{R_0 C_0} \left(1 - \frac{V_5}{V^+}\right)$

Como la tensión dc (sin señal de audio que module) de la patilla 5 se obtiene con el divisor resistivo formado por  $R_2 = 150k$  y  $R_3 = 22k\Omega$  tenemos:  $V_5 = V^+ \frac{R_2}{R_2 + R_3} = V^+ \cdot 0.872 \Rightarrow \frac{V_5}{V^+} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \underline{\underline{cte}}$

Por tanto, la frecuencia central del VCO NO VARIA AUNQUE VARIE LA TENSION DE ALIMENTACION. Esto es bueno y quizá haya llevado a escribir lo de "Excellent supply voltage rejection" en la

primera hoja de características que da el fabricante. No obstante, no <sup>4</sup> hay que ser incautos y además de saber "leer entre líneas", hay que saber "leer en las fórmulas" como veremos en el próximo Apartado.

⑥ La alimentación de la etapa amplificadora clase-C en torno a  $Q_1$  se hace con  $+V_{cc} \approx 20.5V$  en vez de  $V^+ = 12V$  porque lo que se busca es inyectar portadora (POTENCIA por tanto) en la red. De cara a este propósito una tensión de  $\approx 20V$  en lugar de  $12V$  podría inyectar una potencia proporcional a  $(V_p)^2 \approx 20^2 = 400$  mientras que con una tensión muy regulada, sí, pero de sólo  $12V$ , inyectaríamos potencia proporcional a  $(12)^2 = 144$  (casi cuatro veces menos).

⑦ Según vimos en el Apdo. 5, la frecuencia ~~red~~ de salida de este VCO venía dada por:

$$f_o = \frac{2^4}{R_o C_o} \left( 1 - \frac{V_5}{V^+} \right)$$

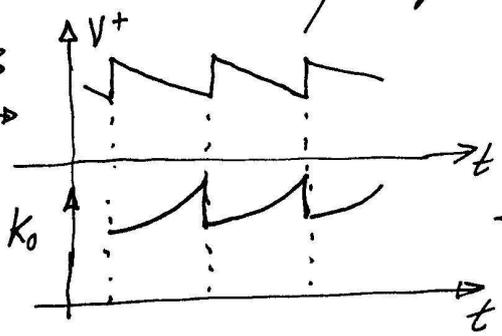
$$K_o = \frac{df_o}{dV_5} = \frac{2^4}{R_o C_o} \cdot \frac{1}{V^+}$$

AQUI YA SE "VE" QUE LA MISMA VARIACION  $\Delta V_5$  PIERDE EFICIENCIA MODULADORA CON ALTAS TENSIONES  $V^+$

Aquí se dice explícitamente que  $K_o$  es inversamente proporcional a la  $V^+$  con que alimentemos el VCO.

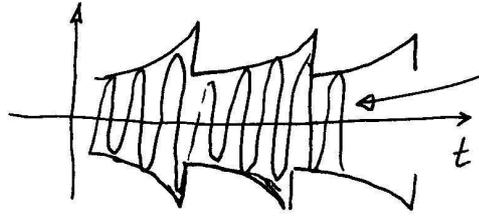
$$\left\{ \begin{array}{l} K_o = 95.8 \text{ kHz/V con LM7812} \\ K_o = 76.6 \text{ kHz/V con LM7815} \end{array} \right.$$

Pensemos en un tono de audio de  $1kHz$  y amplitud constante que entra en la patilla (5) de la Figura. Si  $V^+$  no fluctúa, perfecto: nuestro VCO da una modulación FM que el demodulador FM interpretará como un tono de  $1kHz$  y amplitud constante. Pero si  $V^+$  fluctúa así por ejemplo:



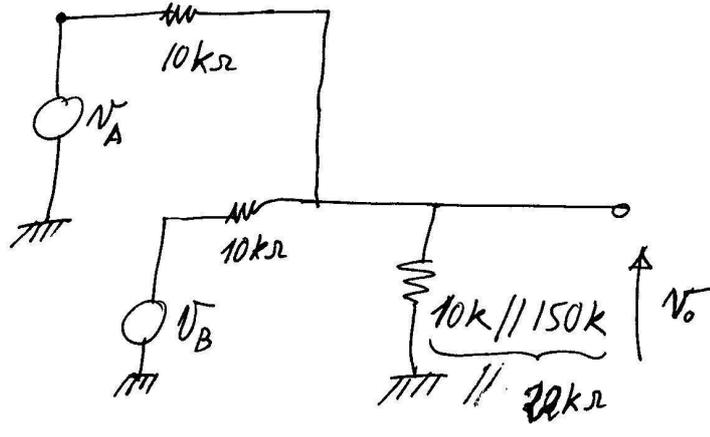
da  $K_o$  del VCO hará algo así, con lo que el demodulador FM sacará un

tono de 1kHz, desde luego, pero con una "envolvente" de la forma:

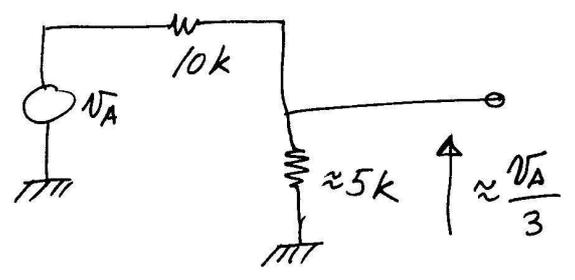


1kHz "modulado" en Amplitud... que no es el audio de 1kHz (tono de amplitud constante)  
(DISTORSION)

8



Superposición de efectos:



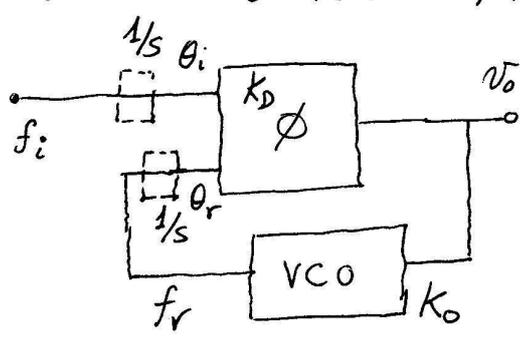
$V_{0\text{pico}} = 66.7\text{mV}$

$V_0 = \frac{V_A}{3} + \frac{V_B}{3} = \frac{2}{3} V_A \quad \left. \vphantom{V_0} \right\} V_{0\text{pico}} = \frac{200}{3}\text{mV}$

$\Delta f_o = 6.389\text{ Hz}$

$\Delta f_o = \frac{2/4}{R_o C_o} \cdot \frac{V_{0\text{pico}}}{V^+ = 12\text{V}} = \frac{2/4 \cdot V_{0\text{pico}}}{18\text{k}\Omega \cdot 116\text{pF} \cdot 12\text{V}}$

9 Tomamos  $K_o = 95.8\text{ kHz/V}$  obtenido al alimentar con el LM7812.



Para engancharse en fase, este PLL hará que la frecuencia de salida del VCO ( $f_r$ ) sea igual a la frecuencia de entrada  $f_i$ . Si  $f_i$  varía en el tiempo (FM) la salida del VCO seguirá esas variaciones, luego  $V_0$  será igual

o seguirá a la señal que moduló en FM a  $f_i(t)$ . La ganancia  $G_{\text{DEM}} = \frac{V_0}{f_i}$  de este demodulador será en bajas frecuencias  $G_{\text{DEM}}(f \rightarrow 0) = \frac{1}{K_o} \left( \frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right)$  porque cualquier variación de  $f_i$ :  $\Delta f_i$  y la que haga  $f_r$  ( $\Delta f_r$ ) serán

iguales:  $\Delta f_i = \Delta f_r \Rightarrow \frac{\Delta f_i}{\Delta v_o} = \frac{\Delta f_r}{\Delta v_o}$  donde  $\Delta v_o$  es la variación de la señal de salida del demodulador. Como  $\frac{\Delta f_r}{\Delta v_o} = K_o$  por definición del VCO, su inverso  $G_{DEM}(f \rightarrow 0) = \frac{\Delta v_o}{\Delta f_r} = \frac{1}{K_o} \left( \frac{V}{Hz} \right)$ . Suponiendo que la frecuencia central del VCO fuese  $140 \text{ kHz}$  y la señal de entrada  $f_i$  fuese los  $141 \text{ kHz}$  del TX, el PLL se engancharía haciendo que  $f_r$  fuese:  $f_r = f_o + K_o v_o^* = 140 \text{ kHz} + 1 \text{ kHz}$ . Habría una pequeña tensión  $v_o^*$  (dc) para desplazar ese  $\text{kHz}$ :  $v_o^* = \frac{1 \text{ kHz}}{K_o = 95.8 \text{ kHz/V}} = 0.011 \text{ V} = 11 \text{ mV (dc)}$ . Ahora sobre este nivel dc se superpondría la señal ac demodulada. Esos  $10 \text{ mV dc}$  son entregados por el comparador de fase que tendrá un error de fase  $\theta_E = \frac{0.011 \text{ V}}{K_D (\text{V/rad})} = 6.25 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.35 \text{ grados}$  en ausencia de modulación FM en  $f_i$ . Es la señal error que gobierna el lazo PLL.

⑩ Considerando el diagrama de bloques del apartado anterior tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \frac{1}{s} \cdot f_i \\ v_o &= \frac{K_D}{1 + K_D K_o \cdot \frac{1}{s}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_o(s)}{f_i(s)} = \frac{K_D}{s + K_o K_D} = \frac{1/K_o}{1 + \frac{s}{K_o K_D}} = G_{DEM}(s)$$

Para que no haya errores en dimensiones,  $K_D \equiv \text{V/rad}$  exige  $K_o \equiv \frac{\text{rad/s}}{\text{V}}$ .

Por ello  $K_o K_D = 16 \frac{\text{V/rad}}{\text{s}} \times 95.8 \frac{\text{kHz}}{\text{V}} \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{ciclo}} = 2\pi \cdot 16 \cdot 95.8 \cdot 10^3 (\text{s}^{-1})$  (\*)

$\underbrace{\hspace{10em}}_{K \text{ ciclos/s} \cdot \text{V}}$

Recordando la función de transferencia del R-C paso-bajo 1<sup>er</sup> orden:

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} \text{ la } \omega_c \text{ de este demodulador será } \omega_c = K_o K_D \cdot \frac{1}{2\pi} = 2\pi \cdot 153 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

es decir: su frecuencia de corte será de  $153 \text{ kHz}$ , demodulando perfectamente señales de audio por debajo de  $20 \text{ kHz}$ .

Su ganancia  $G_{DEM}(f \rightarrow 0)$  es  $\frac{1}{K_o} = 10^4 \mu\text{V/Hz}$  (Aparado anterior)

o bien:  $\frac{1}{2\pi \cdot 95.8 \cdot 10^3} = \frac{10^4}{2\pi} \frac{\mu\text{V}}{\text{rad/s}}$  con las unidades de (\*)

